EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….025**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine $a \in \mathbf{R}$ ştiind că punctul $A(1,-2)$ este situat pe cercul de ecuație $x^2 + y^2 - a = 0$.

(4p) **b)** Să se scrie ecuația unei drepte paralele cu dreapta de ecuație $x = 4$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$.

(4p) **d)** Să se calculeze modulul numărului complex $z = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i$

(2p) **e)** Să se calculeze $\sin A$ dacă în triunghiul ABC avem $BC = 2, AB = 4$ şi $m(\hat{C}) = 30^0$.

(2p) **f)** Să se calculeze aria triunghiului ABC în care $BC = 2, AB = 4$ şi $m(\hat{B}) = 30^0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se determine simetricul elementului $\hat{3}$ în grupul $(\mathbf{Z}_8,+)$.

(3p) **b)** Să se determine $a \in (0, \infty)$ pentru care $\log_3 2 + \log_3 a = 1$.

(3p) **c)** Să se determine $b \in \mathbf{R}$ pentru care $9^b = 27$.

(3p) **d)** Să se calculeze câte numere de 2 cifre scrise în baza 10 au numai cifre impare.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea să alegem un nasture alb dacă avem 3 nasturi albi şi 5 nasturi negri.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

(3p) **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $x_0 = 1$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(n+1) - f(n)\right)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \middle|\ a,b\in \mathbf{R}\right\}$ şi matricele $A_n=\begin{pmatrix} n^2 & 1 \\ -1 & n^2\end{pmatrix}$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A_n\in G$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

(4p) **b)** Să se arate că $A\cdot B\in G$, $\forall A,B\in G$.

(4p) **c)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A_{2007}.

(2p) **d)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n\in G$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

Notăm $\begin{pmatrix} x_n & y_n \\ -y_n & x_n\end{pmatrix}=A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $x_1=1$ şi $y_1=1$.

(2p) **f)** Să se verifice relațiile $x_{n+1}=(n+1)^2x_n-y_n$ şi $y_{n+1}=(n+1)^2y_n+x_n$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că $x_n>0$ şi $y_n>0$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $p\in(0,\infty)$ fixat şi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=1+\dfrac{(-1)^1}{p+1}+\dfrac{(-1)^2}{2p+1}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{np+1}$, $\forall n\in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se verifice că $\dfrac{1}{1-a}=1+a+\ldots+a^n+\dfrac{a^{n+1}}{1-a}$, $\forall n\in \mathbf{N}$ şi $\forall a\in \mathbf{R}\setminus\{1\}$.

(4p) **b)** Să se deducă relația $\dfrac{1}{1+x^p}=1-x^p+x^{2p}-\ldots+(-1)^n x^{np}+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{(n+1)p}}{1+x^p}$, $\forall x\in[0,1], \forall n\in \mathbf{N}$.

(4p) **c)** Să se arate că $0\leq \dfrac{x^{(n+1)p}}{1+x^p}\leq x^{(n+1)p}$, $\forall x\in[0,1], \forall n\in \mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{(n+1)p}}{1+x^p}dx=0$.

(2p) **e)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^p}dx$.

(2p) **f)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{5\cdot 6}-\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln 2}{2}$